Domácí úkol ze cvičení 10. (prosím, přečtěte si všechny příklady a vyřešte aspoň dva z nich)

Opakování „základních" pojmů (zvláště diferenciálu)":

Zkuste ještě příklady z minulého domácího úkolu :

1. Ukažte, že pro malá x, y platí $arctg \dfrac{x+y}{1+xy} \cong x+y$.
2. Ukažte, že funkce $f(x,y)=\sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$, i když existují parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Je dána funkce f : $f(x,y)=xy$ pro $|x| \geq |y|$, $f(x,y)=0$ pro $|x|<|y|$.
   a) Vyšetřete spojitost funkce f v R^2;
   b) Vypočítejte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;
   c) Vyšetřete, zda je funkce f v bodě $(0,0)$ diferencovatelná.
   d) Ukažte, že $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Nebo „nové" příklady:

4. Je dána funkce f : $f(x,y)=(x^2+y^2).\sin(\dfrac{1}{x^2+y^2})$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0)=0$.
   a) Ukažte, že funkce f je spojitá v R^2 .
   b) Vypočítejte $\nabla f(0,0)$;
   c) Ukažte, že funkce f je v bodě $(0,0)$ diferencovatelná, i když nemá bodě $(0,0)$ spojité parciální derivace.

5. a) Ukažte (spíše zopakujte), že je-li funkce diferencovatelná v bodě $X_0 \in R^n$, pak má pro libovolný vektor $\vec{a} \in R^n, \vec{a} \neq \vec{o}$ derivaci ve směru $\vec{a}$. $D_{\vec{a}} f(X_0) = \langle \nabla f(X_0), \vec{a} \rangle$.
   b) Zjistěte, zda funkce $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ je v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $\vec{a}=(2,1)$ rostoucí nebo klesající. Najděte vektor $\vec{a}$, $\|\vec{a}\|=1$, v jehož směru funkce f v bodě $(1,1)$ roste nejrychleji.

A příklady k promyšlení jako příprava na příští cvičení 2.5. :

Derivace složené funkce více proměnných (promyslete, prosím, „nejde"- případné nejasnosti probereme na příštím cvičení)

1. Derivace složené funkce více proměnných: „technika" derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového" pravidla - jaké to jsou předpoklady?
   a) Je-li $g(t)=f(\sin t, t^2)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$.
   b) Určete $g'(x)$ a $g''(x)$, je-li $g(x)=F(x,\varphi(x))$.
   c) Určete parciální derivace 1.řádu a některou parciální derivaci 2. řádu funkce g , je-li
   (i) $g(x,y)=f(x^2 y, \dfrac{x}{y})$; (ii) $g(x,y)=f(x^2+y^2, xy, \dfrac{y}{x})$; (iii) $g(x,y,z)=f(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z})$.
   d) Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $g(x,y)=F(x,y,\varphi(x,y))$.

2*. Transformujte diferenciální operátor $x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ do polárních souřadnic

($x = r\cos\varphi, x = r\sin\varphi$, $r \in (0,\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi]$) .

(úloha pro ty, co by chtěli vyřešit rovnici $x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$)

Extrémy („jednoduché") – pokuste se vyřešit aspoň jeden z příkladů a vyzkoušet si tak aplikaci příslušných vět o lokálních a globálních extrémech :

1. Vyšetřete v R^2 globální i lokální extrémy následujících funkcí:
   a) $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$;
   b) $f(x,y) = 12xy - x^2y - xy^2$;
   c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y)$ na množině M , je-li
   $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ a $M = \{(x,y);\ x^2 \le y \le 4\}$.